NÚMEROS TRANSREAIS. MAIS UMA ETAPA NA HISTÓRIA DOS NÚMEROS

Tiago Soares dos Reis
Doutorando HCTE/UFRJ
Professor IFRJ - Volta Redonda
tiago.reis@ifrj.edu.br

Walter Gomide Nascimento Jr
Pós-doutorando HCTE/UFRJ
Professor UFMT
waltergomide@yahoo.com

Ricardo Silva Kubrusly
Professor HCTE/UFRJ
risk@hcte.ufrj.br

Resumo: Os números transreais foram propostos por James Anderson a fim de aplicá-los à programação de computadores. O conjunto dos transreais, no qual é permitida a divisão por zero, é formado pelos números reais adicionado de três novos elementos, infinito, menos infinito e o nulidade. Neste texto fazemos um apanhado histórico da evolução do conceito de número. Ao fim, fazemos uma introdução à exposição de James Anderson e comentamos, brevemente, nossa proposta de construção dos transreais a partir dos reais.

Palavras-chave: Números Transreais, Análise Não-standard, Divisão por Zero.

1. Introdução

Na década de 2000, James Anderson[1] introduz o conjunto dos números transreais. A motivação de Anderson era dar uma definição à divisão por zero. Seu desejo seria aplicar esta teoria à programação de computadores, a fim de que estes não voltassem mensagem de erro quando do aparecimento de uma divisão por zero durante seu processamento. James Anderson postula, além dos números reais, a existência de três novos números, $1/0$, $-1/0$ e $0/0$ e chama de números *transreais* os números reais adicionados destes três novos elementos.

Assim, Anderson introduz um novo conceito de número de forma axiomática. É claro que tal caminho para resolver-se o problema da divisão por zero é passível da

[1] James A. D. W. Anderson atualmente é professor da School of Systems Engineering - Reading University na Inglaterra.

opinião de que apenas foi dado um nome para o objeto $0/0$, que não é um número (no sentido usual)! Esta observação, em um primeiro momento, não está equivocada. Porém, lembramos que este é um processo comum na história da matemática. Por exemplo, quando Bombelli[2] encontrou a raiz quadrada de um número negativo, teve a audácia de operar com este objeto supondo que, para este novo objeto, valiam as propriedades aritméticas dos números reais. Bombelli não deu o rigor que a matemática atual exige, mas matemáticos posteriores estabeleceram de forma construtiva e rigorosa o hoje, tão aceito e importante na matemática e em diversas ciências, conjunto dos números complexos. James Anderson deu um importante passo na resolução do problema da divisão por zero propondo uma axiomática para os números transreais. Os autores deste texto têm uma proposta, a ser publicada, de construção do conjunto dos transreais a partir do conjunto dos números reais. Desta forma, os transreais e sua aritmética surgem como uma consequência dos reais e não de forma axiomática.

No presente texto trataremos da evolução, ao longo da história, do conceito de número. De como o homem, em diversos momentos, necessitou ampliar o que entendia por número. E observaremos que cada uma destas ampliações se deu inicialmente de forma intuitiva, sem preocupação com rigor, vindo depois a formalização do novo conjunto numérico.

2. A Evolução do Conceito de Número

O que entendemos por número nem sempre foi como é hoje. Os conceitos não nascem prontos nas páginas dos livros e artigos, nem nas mentes de seus pesquisadores, mas evoluem, mudam e são aprimorados ao longo do tempo. As primeiras percepções do que seria um número parecem estar ligadas a dessemelhanças. Por exemplo, a diferença entre alimentar uma pessoa e alimentar muitas pessoas, produzir uma ferramenta e produzir duas ferramentas (BOYER, 1974). Percebidas as diferenças entre grupos de um mesmo tipo de coisa, passa-se a observar as semelhanças entre grupos de coisas diferentes. Qual seria a semelhança entre um casal de coelhos e uma dupla de homens? A princípio, estes dois grupos são bem diferentes, porém notamos uma regularidade quando

---

[2] Rafael Bombelli: matemático italiano que viveu no século XVI.

passamos a falar de um grupo para outro. Uma característica comum a estes dois grupos é a noção intuitiva de que ambos são formados pela mesma quantidade de objetos. O homem primitivo, para expressar o montante de um determinado grupo, passou a utilizar marcações em ossos ou tábuas de barro de forma que cada marca feita correspondia a um determinado objeto do grupo. Estes são, talvez, os primeiros indícios da utilização de representações numéricas. O homem abstraia a característica peculiar de cada coisa e usava os mesmos símbolos para representar quantidades ainda que de coisas diferentes. Estes números que nascem de processos de contagem são os denominados números naturais.

Por muito tempo os únicos entes compreendidos por números eram os números naturais. Porém não é difícil conjecturar que, em algum momento na história, se iniciaria o uso de frações. Um dos registros mais antigos que se tem da ideia de número fracionário é o Papiro de Ahmes[3] (ou Papiro de Rhind[4]). Datado de aproximadamente 1650 a.C., é um papiro egípcio que propõe, dentre outros, problemas de multiplicação e divisão entre frações. Cabe destacar também os registros babilônicos em tabelas com o inverso multiplicativo e operações de multiplicação e divisão. Uma dessas tabelas mostra os inversos dos números inteiros de 2 a 12, exceto os de 7 e de 11. O motivo, provavelmente, é o fato de 7 e 11 não terem representação sexagesimal finita (60 era a base de numeração babilônica) (EVES, 2011). Isto revela que a aritmética babilônica não possuía todas as operações atuais entre racionais positivos. Com isto, observamos que, para os babilônios, os números cujas representações sexagesimais não eram finitas não atendiam o conceito de número.

O reconhecimento e a utilização de números inteiros negativos surgiram depois dos números fracionários. Por volta de 200 a.C, o sistema de numeração chinês indicava o uso de números negativos. Já na Europa, a partir do século XII, uma das grandes motivações para o desenvolvimento da matemática era o problema da resolução de equações polinomiais. Cardano[5], em seu livro *Ars Magna*, admite soluções negativas (BOYER, *op.cit*). Mesmo que alguns matemáticos aceitassem a ideia de número negativo, por um longo tempo, estes foram motivo de controvérsias e discussões. Uma contribuição importante para seu desenvolvimento foi a de

---

[3] Ahmes: escriba egípcio que viveu, provavelmente, entre os séculos XVII a.C. e XVI a.C.
[4] Alexander Henry Rhind: egiptólogo escocês que viveu no século XIX.
[5] Girolamo Cardano: matemático, filósofo e médico italiano que viveu no século XVI.

Fontenelle[6], que entendia os números negativos não apenas como oriundos do processo de subtração, mas também como números que estavam em posição oposta aos positivos. Muitos outros contribuíram para o desenvolvimento e aceitação do conjunto dos números negativos, até seu total estabelecimento com a formalização de número real.

A ideia de número irracional se deu, provavelmente, quando da descoberta de grandezas incomensuráveis[7] (EVES, *op.cit*). Existem controvérsias sobre quando e por quem se deu esta descoberta, mas o certo é que ela aconteceu. *Os Elementos* de Euclides[8] mostram uma demonstração da incomensurabilidade entre a diagonal e o lado de um quadrado. Sendo assim, ficou estabelecido que as razões entre números inteiros não eram suficientes para representar medidas. Hoje chamamos os números que não podem ser expressos por uma razão entre inteiros de números irracionais. Já no século XVII, os irracionais eram manipulados sem preocupação com sua natureza.

Como sabemos, em diversos momentos, a matemática é feita de forma intuitiva. Porém não são poucas as situações em que falha a nossa intuição. Por isto, a matemática passou por um processo de busca de rigor, isto é, as verdades estabelecidas não deveriam basear-se apenas na percepção, mas em uma dedução lógica de verdades já estabelecidas; e os objetos de estudos deveriam estar bem definidos e fundamentados. O Cálculo, por exemplo, se mostrou bastante frutífero, porém suas inovações trouxeram também uma preocupação com a fundamentação de seus conceitos. E um dos principais objetos de estudo do Cálculo é o conjunto dos números reais (os irracionais unidos aos racionais). Até então, a ideia que prevalecia era a de que cada ponto da reta corresponde a um número. Porém era necessária uma formalização dos números reais sem o apelo geométrico da reta. No século XVIII, consolidou-se a noção de que a propriedade que possui a reta, mas falta aos números racionais é a continuidade. O problema é que o conceito de continuidade era, ainda, uma ideia intuitiva, carecendo de formalização. Dedekind[9] foi o primeiro a conceituar continuidade. Ele verificou que todo ponto na reta

---

[6] Bernard le Bouvier de Fontenelle: matemático francês que viveu entre os séculos XVII e XVIII.

[7] Duas grandezas são incomensuráveis, quando não são comensuráveis. E são comensuráveis quando existe uma grandeza de medida u e números inteiros m e n tais que uma das grandezas tem medida mu e a outra tem medida nu.

[8] Euclides: matemático grego que viveu entre os séculos IV a.C e III a.C.

[9] Richard Dedekind foi um matemático alemão do século XIX. Além de apresentar o conceito de continuidade, Dedekind também se notabilizou por apresentar os números naturais mediante um conjunto de postulados que, mais tarde, seria visto como a primeira caracterização estruturalista dos números naturais.

determina uma decomposição da mesma em duas partes, de tal forma que todo ponto de uma parte está à esquerda de todo ponto da outra parte. Dedekind verificou que a recíproca é verdadeira. Se a reta for dividida em duas partes de tal forma que todo ponto de uma está à esquerda de todo ponto da outra, então existe um e somente um ponto que faz esta separação. Esta, a recíproca, seria a propriedade de continuidade da reta. Com isso, Dedekind definiu cada número real como sendo um *corte*[10] no conjunto dos números racionais e, a partir desta definição, deduziu todas as propriedades de números reais, inclusive a que falta aos racionais, a continuidade. Mais tarde, Cantor[11] também deu uma construção dos números reais, mas diferente da de Dedekind. Cantor definiu cada número real como uma determinada classe de sequências de números racionais.

Rafael Bombelli se deparou com a raiz quadrada de um número negativo enquanto procurava solução para a equação $x^3 - 15x - 4 = 0$. Até então, era comum dizer, apenas, que a equação não possuía solução. Bombelli operou com o objeto estranho, a raiz quadrada de um número negativo, utilizando as propriedades usuais de números reais e encontrou 4 como solução. Substituindo *x* por 4, não é difícil ver que, de fato, 4 é solução da equação. Bombelli, então, passou a utilizar os números *imaginários* com as mesmas propriedades aritméticas dos números reais. Por muito tempo, a ideia de que a raiz quadrada de um número negativo é um número não foi bem aceita entre os matemáticos. Porém, a necessidade do estudo destes novos objetos foi latente. Com a formalização de que cada número complexo era um par ordenado de números reais, com definições de adição e multiplicação convenientes, as ideias contrárias a estes números foram abandonadas (BOYER, *op.cit*).

Um dos conceitos fundamentais do Cálculo é o de limite. Um embrião desta ideia foi utilizado já na antiguidade, como, por exemplo, no atualmente denominado Método da Exaustão (BOYER, *op.cit*). Já Leibniz[12], um dos precursores do Cálculo moderno, não tinha formatada a ideia de limite. Ele não tomava o limite de um determinado número tendendo a zero. Leibniz tomava um número infinitamente

---

[10] Um conjunto *A* de números racionais é dito um *corte* (corte de Dedekind) se, e só se, não é um conjunto trivial, isto é, *A* não é vazio e não é o conjunto de todos os racionais e, além disso, satisfaz às duas propriedades: se *x* é um elemento de *A* e *y* é um racional com $x < y$, então *y* é um elemento de *A*; se *z* é um elemento de *A*, então existe um elemento de *A, w*, tal que $z < w$.
[11] George Ferdinand Ludwig Philipp Cantor: matemático russo que viveu entre os séculos XIX e XX.
[12] Gottfried Wilhelm Leibniz: filósofo, matemático e diplomata alemão que viveu entre os séculos XVII e XVIII.

pequeno ou infinitamente próximo de zero, mesmo sem ter uma definição rigorosa do que seria este número (CARVALHO e D'OTTAVIANO, 2006). Os infinitésimos de Leibniz sofreram duras críticas por carecerem de uma formalização. Só na década de 1960, Robinson[13] estabeleceu de forma rigorosa o conceito de infinitésimos. Estes números pertenceriam a um conjunto que contém o conjunto dos números reais: o conjunto dos números hiperreais. Robinson define cada número hiperreal como uma determinada classe de sequências de números reais, e com definições adequadas de adição, multiplicação e da relação de ordem, deduz as propriedades aritméticas destes novos números.

3. Números Transreais

Como já comentado, James Anderson propôs o conjunto dos números *transreais* que seria o conjunto formado pelos números reais e três novos números (chamados de números estritamente transreais): $1/0$, $-1/0$ e $0/0$. Estes três números são, respectivamente, denominados por *infinito*, *menos infinito* e *nulidade* e simbolizados por ∞, $-\infty$ e Φ. Anderson postula que $1/0 = x/0$ e $1/0 = -x/0$ para qualquer x real positivo. Também define que $-\infty < x < \infty$ para qualquer x transreal diferente de Φ, e que Φ não tem relação de ordem com qualquer outro número transreal. Além disso, define as operações aritméticas entre os números estritamente transreais e entre estes e os números reais: se x é um número transreal, então

Simétrico: $-\Phi = \Phi$, $-(\infty) = -\infty$, $-(-\infty) = \infty$.

Recíproco: $0^{-1} = \infty$, $\Phi^{-1} = \Phi$, $\infty^{-1} = 0$, $(-\infty)^{-1} = 0$.

Adição: $\Phi + x = \Phi$, $\infty + x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{-\infty, \Phi\} \\ \infty, & x \notin \{-\infty, \Phi\} \end{cases}$, $-\infty + x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{\infty, \Phi\} \\ -\infty, & x \notin \{\infty, \Phi\} \end{cases}$.

Multiplicação: $\Phi \times x = \Phi$, $\infty \times x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{0, \Phi\} \\ \infty, & x > 0 \\ -\infty & x < 0 \end{cases}$, $-\infty \times x = \begin{cases} \Phi, & x \in \{0, \Phi\} \\ -\infty, & x > 0 \\ \infty & x < 0 \end{cases}$.

[13] Abraham Robinson: matemático estadunidense que viveu no século XX.

Nós propomos um caminho alternativo. Em texto a ser publicado, fazemos uma construção do conjunto dos transreais a partir do conjunto dos números reais. Definimos cada número transreal como uma classe adequada de pares ordenados de números reais. Definimos, para estas classes, as operações aritméticas e uma relação de ordem a partir das propriedades entre números reais. Desta forma, as propriedades dos transreais são deduzidas, isto é, são consequências lógicas das propriedades dos números reais.

É importante salientar que há vários contextos em que os transreais se mostram mais adequados como instrumento de análise do que os próprios reais. Por exemplo, em lógica, pode-se construir uma *semântica total*[14] que abarca todas as possibilidades lógicas existentes. Assim, o infinito (∞) é associado ao "absolutamente" verdadeiro, o menos infinito ($-\infty$) ao "absolutamente" falso, o zero (0) ao que é simultaneamente verdadeiro e falso (paradoxos), e a nulidade (Φ) é associada ao que nem é verdadeiro nem falso (o indeterminado). Os números reais maiores que zero são relacionados a "graus do verdadeiro", e os números reais menores que zero são associados a "graus do falso". A vantagem de tal semântica é que ela consegue unificar, de forma bem simples, os comportamentos semânticos tanto das lógicas clássicas como das ditas não-clássicas (lógicas que não obedecem ao princípio de não-contradição ou ao princípio do terceiro excluído).

Referências

ANDERSON, J. A. D. W.; VÖLKER, N. e ADAMS, A. A. Perspex Machine VIII: Axioms of transreal arithmetic in Vision Geometry XV Longin Jan Latecki, David M. Mount, Angela Y. Wu, Editors, Proceedings of the SPIE, vol. 6499, 2007.

BOYER, C. B. História da Matemática. São Paulo: Edigard Blücher, 1974.

CARVALHO, Tadeu F. de e D'OTTAVIANO, Itala M. L. Sobre Leibniz, Newton e infinitésimos, das origens do cálculo infinitesimal aos fundamentos do cálculo diferencial paraconsistente. Revista Educação Matemática Pesquisa v.8, n.1, São Paulo: PUC-SP, 2006.

EVES, H. Introdução à História da Matemática. Campinas: UNICAMP, quinta edição, 2011.

[14] Tal semântica total é tema de pesquisa de Walter Gomide, um dos autores deste artigo. Tal pesquisa está sendo desenvolvida no HCTE, na qualidade de pós-doutoramento, sob a orientação do Prof. Ricardo Kubrusly e com o auxílio direto do doutorando Tiago dos Reis, ambos também autores deste texto.